Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

Lunes 8 de mayo de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

2217 – 7228

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Utilice la regla de l'Hôpital para determinar el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \ln(1 + x)} .$$

2. [Puntuación máxima: 6]

Sea la serie de Maclaurin correspondiente a $\tan x$

$$\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots ,$$

donde a_1, a_3 y a_5 son constantes.

(a) Halle la serie correspondiente a $\sec^2 x$, en función de a_1, a_3 y a_5, hasta el término en x^4 inclusive

(i) derivando la serie correspondiente a $\tan x$ dada anteriormente;

(ii) utilizando la relación $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. [3]

(b) A partir de lo anterior, y comparando las dos series obtenidas, determine el valor de a_1, de a_3 y de a_5. [3]

3. [Puntuación máxima: 9]

Utilice el criterio de la integral de Cauchy para determinar si la serie infinita $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ es convergente o divergente.

4. [Puntuación máxima: 13]

(a) Considere la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right), x > 0.$$

Utilice la sustitución $y = vx$ para mostrar que la solución general de esta ecuación diferencial es

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{f(v) - v} = \ln x + \text{Constante}.$$ [3]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}, x > 0,$$

sabiendo que $y = 1$ cuando $x = 1$. Dé la respuesta en la forma $y = g(x)$. [10]

5. [Puntuación máxima: 15]

Considere la curva $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

(a) Dibujando con precisión un diagrama y considerando el área bajo la curva de una región apropiada, muestre que para $r > 0$,

$$\frac{1}{r+1} < \ln\left(\frac{r+1}{r}\right) < \frac{1}{r}.$$ [4]

(b) A partir de lo anterior, y sabiendo que n es un número entero positivo mayor que uno, muestre que

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} > \ln(1+n)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} < 1 + \ln n$. [6]

Sea $U_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln n$.

(c) A partir de lo anterior, y sabiendo que n es un número entero positivo mayor que uno, muestre que

(i) $U_n > 0$;

(ii) $U_{n+1} < U_n$. [4]

(d) Explique por qué estos dos resultados demuestran que $\{U_n\}$ es una progresión convergente. [1]